

Total number of printed pages-12

3 (Sem-6) MAT 1

2020

MATHEMATICS

(General)

Paper : 6.1

(Linear Algebra and Complex Analysis)

Full Marks : 80

Time : Three hours

**The figures in the margin indicate
full marks for the questions.**

Answer either in English or in Assamese.

1. Write the answers of the following questions :
1×10=10

নিম্নোক্ত প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰবোৰ লিখা :

(a) Is the set $\{(0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$
linearly independent ?

$\{(0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ সংহতিটো বৈখিকভাৱে
স্বতন্ত্ৰ হয়নে ?

Contd.

(b) State whether $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ is an elementary matrix or not.

$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ মৌলকক্ষটো প্ৰাথমিক মৌলকক্ষ

হয়নে নহয় উল্লেখ কৰা।

(c) Is the union of two subspaces of a vector space always a subspace?

এখন সদিশ স্থানৰ দুখন উপ-সদিশ স্থানৰ মিলন সদায়ে এখন উপ-সদিশ স্থান হয়নে ?

(d) Define conjugate functions.

সংযুগ্ম ফলনৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(e) Can the set $\{(1, 2, 3), (0, 1, 1)\}$ be a basis for $R^3(R)$?

$\{(1, 2, 3), (0, 1, 1)\}$ সংহতিটো $R^3(R)$ ৰ ভূমি হ'ব পাৰেনে ?

(f) Write the Cauchy-Riemann Equations in Polar form.

ধ্ৰুৱীয় আকাৰত ক'ছি-ৰিমানৰ সমীকৰণসমূহ লিখা।

(g) Mention the rank of the matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

মৌলকক্ষটোৰ কোটি উল্লেখ কৰা।

(h) Is the function $f(x) = 3x + 2$ a linear transformation from R to R ?

$f(x) = 3x + 2$ ফলনটো R -ৰ পৰা R লৈ এটা বৈখিক ৰূপান্তৰণ হয়নে ?

(i) Write the eigenvalues of $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

মৌলকক্ষটোৰ আইগেন মানবোৰ লিখা।

(i) If S is a subset of a vector space $V(F)$, then $L(L(S)) = ?$

যদি S এখন সদিশ স্থান $V(F)$ ৰ উপসংহতি হয়, তেন্তে $L(L(S)) = ?$

2. Answer **any two** parts of the following :
2×2=4

তলৰ যিকোনো দুটা অংশৰ উত্তৰ লিখা :

(a) Prove that a set containing the zero vector is linearly dependent.

প্রমাণ কৰা যে শূন্য ভেক্টৰ অন্তর্ভুক্ত হৈ থকা সংহতি এটা বৈখিকভাৱে পৰতন্ত্র।

(b) Prove that $U = \{(a, 0) : a \in R\}$ is a subspace of the vector space $R^2(R)$.

প্রমাণ কৰা যে $U = \{(a, 0) : a \in R\}$ সংহতিটো $R^2(R)$ সদিশ স্থানৰ উপ-সদিশ স্থান হয়।

(c) If $f : U(F) \rightarrow V(F)$ be a linear transformation and $0, 0'$ are zero vectors in $U(F)$ and $V(F)$ respectively, then show that $f(0) = 0'$.

যদি $f : U(F) \rightarrow V(F)$ এটা বৈখিক ৰূপান্তৰণ আৰু $0, 0'$ ক্ৰমে $U(F)$ আৰু $V(F)$ ৰ শূন্য ভেক্টৰ হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে $f(0) = 0'$ ।

3. Answer **any three** of the following :

2×3=6

নিম্নোক্তবোৰৰ যিকোনো তিনিটাৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Show that the function

$$u(x, y) = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2$$

is harmonic.

দেখুওৱা যে $u(x, y) = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2$ ফলনটো এটা হৰ্মনিক ফলন।

(b) If $f(z) = 3z^2 + 2z$, then prove that

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = 6z_0 + 2$$

যদি $f(z) = 3z^2 + 2z$, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = 6z_0 + 2$$

(c) Show that :

দেখুওৱা যে :

$$\frac{d}{dz} \sin^{-1} z = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

- (d) For any two complex numbers z_1 and z_2 , prove that $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$.

যিকোনো দুটা জটিল সংখ্যা z_1 আৰু z_2 -ৰ বাবে প্ৰমাণ কৰা যে $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$.

4. Answer **any four** parts : 5×4=20

চাৰিটা অংশৰ উত্তৰ লিখা :

- (a) Prove that the intersection of an arbitrary collection of subspaces of a vector space is again a subspace of the space.

প্ৰমাণ কৰা যে এখন সদিশ স্থানৰ যিকোনো সংখ্যক উপ-সদিশ স্থানৰ ছেদন এখন উপ-সদিশ স্থান।

- (b) Show that any subset of a linearly independent subset of a vector space is always linearly independent.

দেখুওৱা যে এখন সদিশ স্থানৰ বৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ উপসংহতি এটাৰ যিকোনো উপসংহতি সদায়ে বৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ।

- (c) Examine whether the vectors $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ and $(1, 1, 1)$ form a basis for $R^3(R)$.

$(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$ ভেক্টৰকেইটাই $R^3(R)$ ৰ এটা ভূমি গঠন কৰেনে পৰীক্ষা কৰা।

- (d) If W_1 and W_2 are two subspaces of $V(F)$, then prove that $W_1 + W_2$ is again a subspace of $V(F)$.

যদি W_1 আৰু W_2 এখন সদিশ স্থান $V(F)$ ৰ উপ-সদিশ স্থান হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $W_1 + W_2$ -ও $V(F)$ -ৰ উপ-সদিশ স্থান হ'ব।

- (e) Prove that every set of $(n+1)$ or more vectors of a finite dimensional vector space $V(F)$ of dimension n is linearly dependent.

প্ৰমাণ কৰা যে n -বীমীয় সদিশ স্থান এখনৰ $(n+1)$ বা ততোধিক ভেক্টৰেৰে গঠিত সংহতি এটা বৈখিকভাৱে পৰতন্ত্র।

- (f) Show that the mapping

$f : R^3(R) \rightarrow R^2(R)$ defined by $f(a, b, c) = (a, b)$, is a linear transformation from $R^3(R)$ onto $R^2(R)$.

দেখুওৱা যে $f : R^3(R) \rightarrow R^2(R)$ যাতে $f(a, b, c) = (a, b)$ ৰ দ্বাৰা সংজ্ঞাৰদ্ধ ফলনটো এটা বৈখিক ৰূপান্তৰণ।

5. Answer **any two** of the following questions :

5×2=10

নিম্নোক্ত প্রশ্নসমূহৰ যিকোনো দুটাৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Prove that $f(z) = z^2 - 2z + 5$ is continuous everywhere in the finite plane.

প্রমাণ কৰা যে $f(z) = z^2 - 2z + 5$ ফলনটো সসীম সমতলৰ সকলো বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন।

(b) Evaluate $\int_C \frac{dz}{z-a}$, where C represents

the circle $|z-a|=r$.

$\int_C \frac{dz}{z-a}$ ৰ মান উলিওৱা য'ত C -য়ে $|z-a|=r$

বৃত্তক নিৰ্দেশ কৰে।

(c) Using the result

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z-a)^{n+1}}, n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

prove that $\oint_C \frac{e^{2z} dz}{(z+1)^4} = \frac{8\pi i}{3e^2}$

where C is the circle $|z|=3$.

C য়ে $|z|=3$ বৃত্তটোক বুজালে

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z-a)^{n+1}}, n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

ফলটিৰ ব্যৱহাৰ কৰি প্রমাণ কৰা যে

$$\oint_C \frac{e^{2z} dz}{(z+1)^4} = \frac{8\pi i}{3e^2}$$

6. State Cayley-Hamilton theorem. Show that the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix}$$

satisfies Cayley-Hamilton theorem.

1+9=10

কেলি-হেমিল্টনৰ উপপাদ্যটো উল্লেখ কৰা। দেখুওৱা যে

$$A = \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix}$$

মৌলিকৰূপটোৱে কেলি-হেমিল্টন উপপাদ্যটো সিদ্ধ কৰে।

Or/অথবা

Find the eigenvalues and eigenvectors of the matrix A where

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad 4+6=10$$

A মৌলকক্ষটোৰ আইগেন মান আৰু আইগেন ভেক্টৰ উলিওৱা য'ত

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

7. Find the analytic function $w = u + iv$, where $u = e^x (x \cos y - y \sin y)$. Further show that the function u is harmonic. $7+3=10$

বৈশ্লেষিক ফলন $w = u + iv$ নিৰ্ণয় কৰা য'ত

$u = e^x (x \cos y - y \sin y)$ । ইয়াৰোপৰি দেখুওৱা যে u ফলনটো এটা হৰাৎক ফলন।

Or/অথবা

If $f(z)$ is analytic inside and on the boundary C of a simply-connected region R , then prove that

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{z-a} \quad 10$$

যদি সবলভাৱে সংযুক্ত ক্ষেত্ৰ R ৰ পৰিসীমা C -ৰ ভিতৰত আৰু C -ৰ ওপৰত $f(z)$ বৈশ্লেষিক হয় তেন্তে প্রমাণ কৰা যে

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{z-a}$$

8. What is meant by a normal form of a matrix? Find the normal form of the matrix A and hence find its rank, where

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 3 & 6 \\ 5 & -1 & 4 & 1 \\ 6 & 8 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad 2+7+1=10$$

এটা মৌলকক্ষৰ প্ৰসামান্য আকাৰ মানে কি বুজায়? A মৌলকক্ষটোৰ প্ৰসামান্য আকাৰ নিৰ্ণয় কৰা আৰু তাৰপৰা A -ৰ কোটি উলিওৱা য'ত

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 3 & 6 \\ 5 & -1 & 4 & 1 \\ 6 & 8 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Or/অথবা

State all the conditions under which a matrix is said to be in echelon form. Reduce the following matrix A to echelon form and hence find its rank where 3+6+1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & -4 \\ -4 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

এটা মৌলিকমাক্ষক ইকেলন আকাৰত থকা বুলি ক'বলৈ প্ৰয়োজনীয় চৰ্তসমূহ উল্লেখ কৰা। নিম্নোক্ত মৌলিকমাক্ষ A -ক ইকেলন আকাৰলৈ ৰূপান্তৰ কৰা আৰু তাৰপৰা A ৰ কোটি নিৰ্ণয় কৰা, য'ত

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & -4 \\ -4 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$