2023

PHYSICS

Paper : PHY0100104

(Mathematical Physics and Mechanics)

Full Marks : 45

Time : Two hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

Answer ***either*** *in English* ***or*** *in Assamese.*

1. Answer the following questions : 1×5=5

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(A) Coriolis force on a particle moving in a rotating frame of reference is

(i) Parallel to the direction of angular velocity of the frame

(ii) Parallel to the direction of velocity of the particle

(iii) Perpendicular to the direction of velocity of the particle but parallel to the direction of angular velocity of the frame

(iv) Perpendicular to both the direction of velocity of the particle and the direction of angular velocity of the frame

ঘূৰ্ণীয়মান স্থানাংক পদ্ধতি এটাত গতি কৰি থকা কণিকা এটাৰ ওপৰত ক্ৰিয়া কৰা কৰিয়োলিছ্ বল

(i) স্থানাংক পদ্ধতিৰ কৌণিক বেগৰ দিশৰ সমান্তৰাল

(ii) কণিকাটোৰ বেগৰ দেশৰ সমান্তৰাল

(iii) কণিকাটোৰ বেগৰ দিশৰ লম্ব কিন্তু স্থানাংক পদ্ধতিৰ কৌণিক বেগৰ দিশৰ সমান্তৰাল

(iv) কণিকাটোৰ বেগৰ দিশ আৰু স্থানাংক পদ্ধতিৰ কৌণিক বেগৰ দিশ দুয়োটাৰে লম্ব দিশত

(B) If L is the angular momentum of a particle of mass m moving under a central force which one of the following is the true expression of areal velocity of the particle?

(i) $dA/dt = L/m$

(ii) $dA/dt = 2L/m$

(iii) $dA/dt = L/2m$

(iv) $dA/dt = L/4m$

যদি কেন্দ্ৰীয় বলৰ প্ৰভাৱত গতি কৰি থকা m ভৰৰ কণিকা এটাৰ কৌণিক ভৰবেগ L হয় তেন্তে তলত দিয়া কোনটো ৰাশিয়ে কণিকাটোৰ ক্ষেত্ৰফলীয় বেগ বুজায়?

(i) $dA/dt = L/m$

(ii) $dA/dt = 2L/m$

(iii) $dA/dt = L/2m$

(iv) $dA/dt = L/4m$

(C) If $\vec{A}$ is a vector field which one of the following is the correct expression for it to be an irrotational vector field?

(i) $\nabla^2\vec{A} = 0$

(ii) $\nabla\times\vec{A} = 0$

(iii) $\nabla.\vec{A} = 0$

(iv) $\nabla\vec{A} = 0$

যদি $\vec{A}$ এটা ভেক্টৰ ক্ষেত্ৰ হয় তেন্তে তলৰ কোনটো সমীকৰণে অ-ঘূৰ্ণায়মান ভেক্টৰ ক্ষেত্ৰ বুজাব?

(i) $\nabla^2\vec{A} = 0$

(ii) $\nabla\times\vec{A} = 0$

(iii) $\nabla.\vec{A} = 0$

(iv) $\nabla\vec{A} = 0$

(D) If $\bar{A}$ is a vector and $d\bar{S}$ is an elementary area vector making an angle of 60° with the given vector, which one of the following is the correct representation of vector flux passing through the area?

(i) $|\vec{A}||d\vec{S}|$

(ii) $|\vec{A}||d\vec{S}|\frac{\sqrt{3}}{2}$

(iii) $|\vec{A}||d\vec{S}|\frac{1}{2}$

(iv) 0

$d\vec{S}$ নামৰ সূক্ষ্ম ক্ষেত্ৰফল ভেক্টৰটোৱে $\vec{A}$ ভেক্টৰৰ লগত 60° কোণ কৰি আছে। তলৰ কোনটো ৰাশিয়ে ক্ষেত্ৰফলখনৰ মাজেৰে পাৰ হৈ যোৱা ভেক্টৰ প্ৰৱাহ (flux) বুজাব?

(i) $|\vec{A}||d\vec{S}|$

(ii) $|\vec{A}||d\vec{S}|\frac{\sqrt{3}}{2}$

(iii) $|\vec{A}||d\vec{S}|\frac{1}{2}$

(iv) 0

(E) If A is the amplitude of simple harmonic oscillation which of the following is the true relation between total energy E and amplitude A?

(i) $E \propto A^2$

(ii) $E \propto A^3$

(iii) $E \propto A^{-2}$

(iv) $E \propto A$

যদি সৰল পৰ্য্যাবৃত্ত দোলনৰ বিস্তাৰ A হয় তেন্তে তলৰ কোনটো সম্পৰ্কই বিস্তাৰ A আৰু মুঠ শক্তিৰ (E) মাজৰ প্ৰকৃত সম্পৰ্ক নিৰ্দেশ কৰে?

(i) $E \propto A^2$

(ii) $E \propto A^3$

(iii) $E \propto A^{-2}$

(iv) $E \propto A$

2. Answer ***any five*** questions from the following: 2×5=10

তলৰ *যিকোনো পাঁচটা* প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(A) If $\varphi = 3x^2y - y^4z^2$ is a scalar field find $\nabla\varphi$ at the point $(1, 2, 1)$

যদি $\varphi = 3x^2y - y^4z^2$ এটা স্কেলাৰ ক্ষেত্ৰ হয় তেন্তে $(1,2,1)$ বিন্দুত $\nabla\varphi$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(B) State the Gauss's divergence theorem.

গাউছৰ অপসৰণ (divergence) উপপাদ্যটো লিখা।

(C) From the gradient operator ∇ in spherical polar coordinates obtain divergence operator ∇^2 in spherical polar coordinates.

গোলাকাৰ মেৰু স্থানাংক পদ্ধতিত ∇ অপাৰেটৰৰ পৰা ∇^2 অপাৰেটৰটো উলিওৱা।

(D) Show that $\vec{F} = (2xy + z^3)\hat{i} + x^2\hat{j} + 3xz^2\hat{k}$ is an irrotational field.

দেখুওৱা যে $\vec{F} = (2xy + z^3)\hat{i} + x^2\hat{j} + 3xz^2\hat{k}$ এখন অঘূৰ্ণায়মান ভেক্টৰ ক্ষেত্ৰ।

(E) Is Earth an inertial frame? Justify.

পৃথিবীখন জড় স্থানাংক পদ্ধতি হয়নে? যুক্তি দৰ্শোৱা।

(F) Give the expression for Coriolis acceleration. If a particle falls vertically downward in Earth's gravitational field what will be the direction of deflection due to Coriolis force? 1+1=2

কৰিয়োলিছ্ ত্বৰণৰ ৰাশিটো লিখা। পৃথিৱীৰ মাধ্যাকৰ্ষণ ক্ষেত্ৰত কণিকা এটা উলম্ব দিশত তললৈ পৰি আছে। কৰিয়োলিছ্ বলে কণিকাটোক কোনটো দিশত গতি কৰাব?

(G) Show that angular momentum is conserved for a central force.

দেখুওৱা যে কেন্দ্ৰীয় বলৰ ক্ষেত্ৰত কৌণিক ভৰবেগ সংৰক্ষিত হয়।

(H) Calculate the reduced mass of a system constituted by a star of mass 2×10^{30} *kg* and a planet of mass 10^{24} *kg*.

2×10^{30} *কিঃগ্ৰাঃ* ভৰৰ তৰা এটা আৰু 10^{24} *কিঃগ্ৰাঃ* ভৰৰ গ্ৰহ এটাৰে গঠিত সমষ্টিটোৰ লাঘৱ ভৰ (reduced mass) গণনা কৰা।

(I) Semimajor axis of Mars is 228×10^6 *km* and that of Jupiter is 778×10^6 *km*. Obtain the ratio of their orbital periods while they move around the Sun.

মঙ্গল আৰু বৃহস্পতি গ্ৰহৰ কক্ষপথৰ অৰ্ধমুখ্য অক্ষ হ'ল ক্ৰমে 228×10^6 *km* আৰু 778×10^6 *km*। সূৰ্যৰ চৌদিশে গ্ৰহ দুটাৰ প্ৰদক্ষিণ কালৰ অনুপাত উলিওৱা।

(J) The displacement of a simple harmonic oscillator as a function of time is given by

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{10}} \cos\left(400\sqrt{10}\, t + 50\right)$$

Obtain its amplitude and time period of oscillation. 0.5+1.5=2

সৰল পৰ্য্যাবৃত্ত দোলক এটাৰ সৰণ তলত দিয়া হ'ল।

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{10}} \cos\left(400\sqrt{10}\, t + 50\right)$$

ইয়াৰ বিস্তাৰ আৰু পৰ্য্যায়কাল নিৰ্ণয় কৰা।

3. Answer ***any four*** questions from the following : 5×4=20

তলৰ ***যিকোনো চাৰটা*** প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(A) The acceleration of a particle at any time t is given by

$$\vec{a} = (12\cos 2t)\hat{i} - (8\sin 2t)\hat{j} + (16t)\hat{k}$$

If the velocity of the particle at $t = 0$ is zero, obtain the velocity vector at anytime t.

t সময়ত কণিকা এটাৰ ত্বৰণ হ'ল

$$\vec{a} = (12\cos 2t)\hat{i} - (8\sin 2t)\hat{j} + (16t)\hat{k}$$

যদি $t = 0$ সময়ত কণিকাটোৰ বেগ শূন্য হয় যিকোনো সময় t ত কণিকাটোৰ বেগ ভেক্টৰটো উলিওৱা।

(B) If gravitational potential energy is written as $V(r) = -k/r$, where k is a constant and $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ show that the negative gradient of $V(r)$ becomes equal to Newton's gravitational force, $\vec{F} = k\vec{r}/r^3$.

যদি মহাকৰ্ষণিক স্থিতি শক্তি $V(r) = -k/r$ হয় য'ত k এটা ধ্ৰুৱক আৰু $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ নিউটনৰ মহাকৰ্ষণ বল $\vec{F} = k\vec{r}/r^3$ আৰু $-\nabla \vee (r)$ সমান বুলি দেখুওৱা।

(C) The line element in Cartesian coordinates is given by $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Obtain the line element in spherical polar coordinates.

কাৰ্টেছীয় স্থানাংক পদ্ধতিত অন্তৰালটো

$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ বুলি লিখা হয়।

গোলকীয় মেৰু পদ্ধতিত (spherical polar coordinates) অন্তৰালটো উলিওৱা।

(D) Angular velocity of Earth is 2×10^{-7} radian/*sec* and its radius is 6378 *km*. Obtain the centrifugal acceleration of a particle located at latitude $\varphi = 60^\circ$. If the angular velocity of Earth is expressed as $\bar{\omega} = \omega\cos\varphi\,\hat{j} + \omega\sin\varphi\,\hat{k}$ and velocity of a particle falling downward is $\bar{v} = -v\hat{k}$ obtain the magnitude of Coriolis acceleration at the latitude $\varphi = 60^\circ$. 2+3=5

পৃথিৱীৰ কৌণিক বেগ 2×10^{-7} ৰেডিয়ান/ছেকেণ্ড আৰু ইয়াৰ ব্যাসাৰ্ধ হ'ল 6378 কিঃমিঃ। 60° অক্ষাংশ (latitude) ত অৱস্থিত কণিকা এটাৰ ওপৰত ক্ৰিয়া কৰা অপকেন্দ্ৰিক ত্বৰণৰ মান উলিওৱা। যদি পৃথিৱীৰ কৌণিক বেগক $\bar{\omega} = \omega\cos\varphi\,\hat{j} + \omega\sin\varphi\,\hat{k}$ আৰু উলম্বদিশত অধোমুখী কণিকা এটাৰ বেগক $\bar{v} = -v\hat{k}$ বুলি প্ৰকাশ কৰা হয়, তেন্তে 60° অক্ষাংশত কৰিয়োলিছ্ ত্বৰণৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(E) State work-energy theorem. A conservative force is expressed as $\bar{F} = -\nabla U$, where U is the potential energy. What is the total work done by the force in moving a particle from point A to point B? Use work-energy theorem to prove that total mechanical energy in moving from A to B is conserved. 1+2+2=5

কাৰ্য্য-শক্তিৰ উপপাদ্যটো লিখা। যদি U স্থিতিশক্তি হয় তেন্তে সংৰক্ষণশীল বল এটাক $\bar{F} = -\nabla U$ বুলি প্ৰকাশ কৰা হয়। A বিন্দুৰ পৰা B বিন্দুলৈ কণিকা এটা নিবলৈ এই বলটোৱে কিমান কাৰ্য্য কৰিব লাগিব? কাৰ্য্য-শক্তিৰ উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি দেখুওৱা যে A ৰ পৰা B বিন্দুলৈ গতি কৰোতে কণিকাটোৰ মুঠ যান্ত্ৰিক শক্তি সংৰক্ষিত হয়।

(F) Assume that two particles of mass m_1 and m_2 are undergoing inelastic collision. If the velocities of the particles before collision are $u_1 = u$ and $u_2 = 0$ and the two particles stick together after collision, obtain an expression for the velocity of the composite after the collision. Show that there is a loss of kinetic energy of the system. 2+3=5

m_1 আৰু m_2 ভৰৰ কণিকা দুটাই অস্থিতিস্থাপক সংঘৰ্ষত লিপ্ত হৈছে। সংঘৰ্ষৰ পূৰ্বে কণিকা দুটাৰ বেগ হ'ল $u_1 = u$ আৰু $u_2 = 0$। সংঘৰ্ষৰ পিছত কণিকা দুটা লগলাগি এটা কণিকাত পৰিণত হ'ল। সংঘৰ্ষৰ পিছত সৃষ্টি হোৱা এই কণিকাটোৰ বেগ কিমান? দেখুওৱা যে এই প্ৰক্ৰিয়াটোত সমষ্টি পদ্ধতিটোৰ গতিশক্তিৰ ক্ষয় হয়।

(G) Obtain the moment of inertia of a circular disc of radius R and mass M.

M ভৰ আৰু R ব্যাসাৰ্ধৰ বৃত্তীয় থাল এখনৰ জড় ভ্ৰামক নিৰ্ণয় কৰা।

(H) State Kepler's laws of planetary motion. Show that areal velocity of a planet in an elliptical orbit remains constant only when angular momentum is conserved. 3+2=5

গ্ৰহ গতিৰ কেপলাৰৰ সূত্ৰ কেইটা লিখা। দেখুওৱা যে গ্ৰহ এটাৰ ক্ষেত্ৰফলীয় বেগ উপবৃত্তীয় কক্ষপথ এটাত ধ্ৰুৱক হয় যদিহে গ্ৰহটোৰ কৌণিক ভৰবেগ সংৰক্ষিত হয়।

4. Answer ***any one*** question from the following : 10

তলৰ ***যিকোনো এটা*** প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(A) *(i)* If (u, v) are two curvilinear coordinates and (x, y, z) are the Cartesian coordinates expressed as $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ and $z = z(u, v)$ show that the squared differential arc length $dx^2 + dy^2 + dz^2$ can be written as $Edu^2 + Fdv^2 + 2Gdudv$. Identify the functions E, F, G. 5

কাৰ্টেছীয় স্থানাংক (x, y, z) ক বক্ৰৰৈখিক স্থানাংক (curvilinear coordinates) (u, v)ৰ সহায়ত $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ আৰু $z = z(u, v)$ বুলি প্ৰকাশ কৰা হ'ল। দেখুওৱা যে কাৰ্টেছীয় অন্তৰাল দৈৰ্ঘ্য $dx^2 + dy^2 + dz^2$, $Edu^2 + Fdv^2 + 2Gdudv$ বুলি প্ৰকাশ কৰিব পাৰি। E, F আৰু G নিৰ্ণয় কৰা।

(ii) If r is the magnitude of the position vector $\bar{r}$ obtain $\nabla\left(\frac{1}{r}\right)$. If electric field is expressed as negative gradient of potential energy $\bar{E} = -\nabla V$, obtain the electric field if the potential energy function is given by $V = -kxy$, where k is a constant. $2.5 + 2.5 = 5$

যদি r স্থানাংক ভেক্টৰ $\bar{r}$ ৰ মান হয় তেন্তে $\nabla\left(\frac{1}{r}\right)$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা। যদি V বিদ্যুৎ বিভৱ শক্তি হয় তেন্তে বিদ্যুৎ ক্ষেত্ৰ খনক $\bar{E} = -\nabla V$ বুলি লিখা হয়। যদি $V = -kxy$ হয়, য'ত k এটা ধ্ৰুৱক ৰাশি, তেন্তে বিদ্যুৎ ক্ষেত্ৰফল নিৰ্ণয় কৰা।

(B) Derive the relation between Young's modulus Y, modulus of rigidity η and bulk modulus K.

ইয়ঙৰ গুণাংক Y, বিৰূপণ গুণাংক, η আৰু আয়তন গুণাংক K ৰ মাজৰ সম্পৰ্কটো স্থাপন কৰা।

(C) Obtain gravitational potential outside, on and inside of a spherical shell of mass M and radius R. What is the value of the Gravitational constant? 9+1=10

M ভৰ আৰু R ব্যাসাৰ্ধৰ গোলাকাৰ খোল (spherical shell) এটাৰ বাহিৰত, পৃষ্ঠভাগৰ ওপৰত আৰু অন্তৰ্ভাগত মহাকৰ্ষণিক বিভৱৰ মান উলিওৱা। মহাকৰ্ষণিক ধ্ৰুৱকৰ মান কিমান?

(D) What are the assumptions made by Poiseuille in deriving rate of flow of a liquid through a narrow tube? Derive Poiseuille's equation for rate of flow of a liquid. 3+7=10

ক্ষীণ নলী এডালৰ মাজেৰে প্ৰৱাহিত তৰলৰ প্ৰৱাহৰ হাৰ উলিওৱাত পইজিউলীয়ে কি কি অনুমান কৰিবলগীয়া হৈছিল? তৰল পদাৰ্থৰ প্ৰৱাহৰ হাৰৰ বাবে পইজিউলীৰ সমীকৰণটো স্থাপন কৰা।