

2017

MATHEMATICS

( General )

( Calculus : Methods and Applications )

Full Marks : 80

Time : 3 hours

The figures in the margin indicate full marks  
for the questions

Answer either in English or in Assamese

1. Answer the following questions : 1×10=10

তলত দিয়া প্রশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Write down the  $n$ th derivative of  $e^{ax+b}$ .

$e^{ax+b}$  ৰ  $n$ তম অৱকলজ লিখা।

(b) Write whether the product of two continuous functions is a continuous function or not.

দুটা অবিচ্ছিন্ন ফলনৰ পূৰণফল অবিচ্ছিন্ন হয় নে নহয় ?

(c) What is the value of

$$\int_0^{\pi/2} \sin^6 x dx ?$$

$\int_0^{\pi/2} \sin^6 x dx$  ৰ মান কি ?

( 2 )

(d) What is the solution of  $\frac{d^2y}{dx} - y = 0$  ?

$\frac{d^2y}{dx} - y = 0$  ব সমাধানটো কি ?

(e) Write the differential equation to determine arc length  $s$  of the curve  $y = f(x)$ .

$y = f(x)$  বক্রৰ চাপেৰ দৈৰ্ঘ্য  $s$  নিৰ্ণয় কৰা অৱকল সমীকৰণটো লিখা।

(f) Find the asymptotes parallel to the  $x$ -axis of the following curve :

$$x^2y^2 - a^2(x^2 + y^2) = 0$$

$x^2y^2 - a^2(x^2 + y^2) = 0$  বক্রলৈ  $x$ -অক্ষৰ সমান্তৰাল অনন্তম্পৰ্শী বেখাৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

(g) If  $f(x, y) = x^3y + e^{xy^2}$ , then find  $f_x$ .

যদি  $f(x, y) = x^3y + e^{xy^2}$  হয়, তেনেহ'লে  $f_x$ ৰ মান উলিওৱা।

(h) Write down the value of  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}$ .

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}$ ৰ মান লিখা।

8A/94

( Continued )

( 3 )

(i) Using Maclaurin's series, write down the expansion of  $e^x$ .

মেক্ল'ৰিণৰ শ্ৰেণী ব্যৱহাৰ কৰি  $e^x$ ৰ বিস্তৃতিটো লিখা।

(j) State Leibnitz's theorem on the  $n$ th derivative of the product of two functions.

দুটা ফলনৰ পূৰণফলৰ  $n$ তম অৱকলজ সম্বন্ধীয় লিবনিজৰ উপপাদ্যটো লিখা।

2. Answer the following questions :

2×5=10

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Find the  $n$ th derivative of  $\sin x$ .

$\sin x$ ৰ  $n$ তম অৱকলজ উলিওৱা।

(b) Show that the function

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{ if } x < 1 \\ 2 & , \text{ if } x = 1 \\ x^2 + 2 & , \text{ if } x > 1 \end{cases}$$

is not continuous at  $x = 1$ .

দেখুৱা যে

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{ যদি } x < 1 \\ 2 & , \text{ যদি } x = 1 \\ x^2 + 2 & , \text{ যদি } x > 1 \end{cases}$$

ফলনটো  $x = 1$  বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন নহয়।

(c) State Lagrange's mean value theorem.

লাগ্ৰাঞ্জৰ মধ্যমান উপপাদ্যটো লিখা।

8A/94

( Turn Over )

( 4 )

(d) If  $xy=4$ , then find the maximum and minimum values of  $4x+9y$ .

যদি  $xy=4$  হয় তেন্তে  $4x+9y$ ৰ গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মানবোৰ নিৰ্ণয় কৰা।

(e) Using Maclaurin's series, expand  $\log(1+x)$  in powers of  $x$  up to first three terms.

মেক্লেৰিণৰ শ্ৰেণী ব্যৱহাৰ কৰি  $\log(1+x)$ ৰ প্ৰথম তিনিটা পদলৈ  $x$ ৰ ঘাত শ্ৰেণীত প্ৰসাৰ কৰা।

3. Answer any four questions : 5×4=20

যি কোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Solve (সমাধান কৰা) :

$$(1+y^2)dx + (x - \tan^{-1}y)dy = 0$$

(b) Solve (সমাধান কৰা) :

$$(D^2 + D + 1)y = \sin 2x$$

(c) State Clairaut's equation and solve it.

ক্লাইব'টৰ সমীকৰণৰ সংজ্ঞা দিয়া আৰু ইয়াৰ সমাধান কৰা।

(d) Show that the length of the portion of the tangent to the curve  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$  intercepted between the coordinate axes is constant.

দেখুৱা যে  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$  বক্ৰটো স্পৰ্শকৰ অক্ষদ্বয়ৰ মাজৰ ছেদাংশ দৈৰ্ঘ্য এটা ধ্ৰুৱক হয়।

8A/94

(Continued)

( 5 )

(e) Find the reduction formula for  $\int \cos^n x dx$ .

$\int \cos^n x dx$ ৰ লঘুকৰণৰ সূত্ৰটো নিৰ্ণয় কৰা।

(f) Find the area of the portion bounded by  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  য়ে আগুৱা অংশৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।

4. Answer any four questions : 10×4=40

যি কোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা :

(a) (i) Prove that  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$  or

$2\int_0^a f(x) dx = 0$  according as  $f(x)$  is an odd or an even function of  $x$ .

প্ৰমাণ কৰা যে  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$  বা

$2\int_0^a f(x) dx = 0$  যথাক্ৰমে  $f(x)$ ,  $x$ ৰ এটা অযুগ্ম বা যুগ্ম ফলন হয়।

(ii) If  $f(x) = f(a+x)$ , then prove that

$$\int_0^{na} f(x) dx = n \int_0^a f(x) dx$$

যদি  $f(x) = f(a+x)$  হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$\int_0^{na} f(x) dx = n \int_0^a f(x) dx$$

8A/94

(Turn Over)

( 6 )

(b) Solve any two of the following :

তলৰ যি কোনো দুটাৰ সমাধান কৰা :

(i)  $(D^3 + 8)y = x^4 + 2x + 1$

(ii)  $(D^2 - 4D + 5)y = \sin x$

(iii)  $(D^2 - 6D + 13)y = 8e^{2x} \sin 2x$

(iv)  $(D^3 - 3D + 2)y = e^{-2x}$

(c) (i) State and prove Euler's theorem on homogeneous functions of two variables.

দুটা চলক বাশিব সমসত্ত্ব ফলনৰ অয়েলাৰৰ উপপাদ্যটো লিখা আৰু ইয়াক প্ৰমাণ কৰা।

(ii) If  $y = e^{\tan^{-1} x}$ , show that

$$(1 + x^2)y_{n+2} + [2(n+1)x - 1]y_{n+1} + n(n+1)y_n = 0$$

যদি  $y = e^{\tan^{-1} x}$ , দেখুওৱা যে

$$(1 + x^2)y_{n+2} + [2(n+1)x - 1]y_{n+1} + n(n+1)y_n = 0$$

(d) Find the radius of curvature of the parabola  $y^2 = 4ax$  at  $(0, 0)$ . Also show that the radius of curvature of  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  at the end of the major axis is equal to the semi-latus rectum of the ellipse.

( 7 )

 $y^2 = 4ax$  অধিবৃত্তৰ  $(0, 0)$  বিন্দুত বক্রতা ব্যাসার্ধউলিওৱা। তাৰোপৰি দেখুওৱা যে  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 

উপবৃত্তৰ দীৰ্ঘাক্ষৰ বিন্দুত বক্রতা ব্যাসার্ধ ইয়াৰ অৰ্থ নাভিলম্ব দীঘৰ সমান হয়।

(e) Evaluate any two :

যি কোনো দুটাৰ মান উলিওৱা :

(i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x}$

(ii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

(iii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^x}{\tan x - x}$

(f) (i) Reduce the following differential equation to homogeneous form and solve it.

তলৰ অৱকল সমীকৰণটো সমঘাত ৰূপলৈ সমানীত কৰা আৰু সমাধান কৰা।

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y + 3}{2x + y + 3}$$

(ii) Find the total length of the circle  $x^2 + y^2 = 4$ . $x^2 + y^2 = 4$  বৃত্তটোৰ সম্পূৰ্ণ দৈৰ্ঘ্য নিৰ্ণয় কৰা।

(g) (i) If (যদি)  $a < b$ , prove that (প্রমাণ কবা)

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \tan^{-1} b - \tan^{-1} a < \frac{b-a}{1+a^2}$$

Hence prove that (হিমাৰ পৰা প্রমাণ কবা যে)

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3}{35} < \tan^{-1} \frac{4}{3} < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}$$

(ii) If (যদি)  $y = \sin^{-1} x$ , prove that (প্রমাণ কবা)

$$(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - n^2y_n = 0$$

(h) (i) Find the asymptotes of the curve  $(x^3 + a^3)y = bx^3$  parallel to  $x$  and  $y$  axis.

$(x^3 + a^3)y = bx^3$  বক্র  $x$  আৰু  $y$  অক্ষৰ সমান্তৰালকৈ অনন্তস্পর্শক নিৰ্ণয় কৰা।

(ii) Form the differential equation of the family of curves

$$y = e^x(A \cos x + B \sin x)$$

$y = e^x(A \cos x + B \sin x)$  বক্রৰ সমষ্টিৰ অৱকল সমীকৰণটো গঠন কৰা।

\*\*\*